УДК 514.76

ОДИН СПОСОБ МЕТРИЗАЦИИ ОРБИТЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОЛИСИСТЕМЫ НА МНОГООБРАЗИИ

С.И.А л е ш н и к о в

(Калининградский государственный университет)

В работе [1] топология на орбите динамической полисистемы определяется как финальная относительно некоторого семейства отображений. Однако значительно удобнее работать с метрической топологией. В настоящей статье показано, как осуществить метризацию топологии орбиты в одном частном случае, когда семейство векторных полей, порождающих динамическую полисистему, конечно, а скобка Ли любых двух полей из данного семейства равна нулю. Будем использовать обозначения, принятые в [1].

Пусть M – гладкое многообразие, $(X^i)_{i\in I}$ – семейство гладких полных векторных полей на M. Для $i \in I$ пусть Ψ_t^i – однопараметрическая группа диффеоморфизмов поля X^i. Обозначим $G(I)$ – группу управления, порожденную семейством $(X^i)_{i\in I}$. Для $x \in M$ и $s = (t_1, i_1)(t_2, i_2)\ldots(t_p, i_p) \in G(I)$ имеем [1]:

$$\pi(s, x) = sx = \Psi_{t_1}^{i_1} \circ \Psi_{t_2}^{i_2} \circ \ldots \circ \Psi_{t_p}^{i_p}(x).$$

Тем самым определено гладкое действие $\pi : G(I) \times M \to M$ группы $G(I)$ на многообразии M.

Положим

$$\delta(s) = \sum_{k=1}^{p} |t_k| \quad \text{для} \quad s = (t_1, i_1)(t_2, i_2)\ldots(t_p, i_p) \in G(I).$$

Пусть e – единичное управление из $G(I)$. Для $s, s_1, s_2 \in G(I)$ и $\lambda \in R$, очевидно, справедливы следующие свойства:

1) $\delta(s) \geqslant 0$, $\delta(s) = 0 \Leftrightarrow s = e$;

2) $\delta(\lambda \cdot s) = |\lambda| \cdot \delta(s)$;

3) $\delta(s_1 s_2) \leqslant \delta(s_1) + \delta(s_2)$.

Будем предполагать далее, что $I = \{1, 2, \ldots, \nu\}$ – конечное множество, а для $i, j \in I$, $i \neq j$, скобка Ли $[X^i, X^j] = 0$. Как известно [2], в этом случае однопараметрические группы Ψ_t^i и Ψ_t^j коммутируют. Для последовательности $s = (t_1, i_1)(t_2, i_2)\ldots(t_p, i_p) \in G(I)$ обозначим

$\mathcal{J}_k(s)$ – множество индексов ℓ этой последовательности, таких, что $i_\ell = k$ для $1 \leq k \leq \nu$.

Положим

$$\theta(s) = \Big(\sum_{j \in \mathcal{J}_1(s)} t_j\,,\ \sum_{j \in \mathcal{J}_2(s)} t_j\,, \dots,\ \sum_{j \in \mathcal{J}_\nu(s)} t_j\Big). \qquad (I)$$

Легко проверить, что θ является представлением группы $G(I)$ в аддитивную группу $\mathbb{R}^\nu$, т.е. для любых $s, s' \in G(I)$ выполняется $\theta(s,s') = \theta(s) + \theta(s')$. Кроме того, для $s \in G(I)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $\theta(\lambda \cdot s) = \lambda \cdot \theta(s)$. Так как для $s = (t_1,1)(t_2,2)\dots(t_\nu,\nu) \in G(I)$ имеем $\theta(s) = (t_1,t_2,\dots,t_\nu)$, то отображение $\theta: G(I) \to \mathbb{R}^\nu$ сюрьективно.

Пусть $\chi: \mathbb{R}^p \to G(I)$ – функция, принадлежащая семейству функций, определяющих финальную топологию группы $G(I)$. Тогда, по определению, существуют $s_1, s_2, \dots, s_p \in G(I)$, такие, что для $t = (t_1,t_2,\dots,t_p) \in \mathbb{R}^p$ выполняется

$$\chi(t_1,t_2,\dots,t_p) = t_1 \cdot s_1\, t_2 \cdot s_2 \dots t_p \cdot s_p.$$

Тогда

$$\theta \cdot \chi(t_1,t_2,\dots,t_p) = t_1 \cdot \theta(s_1) + t_2 \cdot \theta(s_2) + \dots + t_p \cdot \theta(s_p).$$

Таким образом, $\theta \cdot \chi$ есть линейное отображение из $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^\nu$. Так как всякое линейное отображение $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^\nu$ непрерывно, то легко видеть, что евклидова топология пространства $\mathbb{R}^\nu$ является финальной относительно семейства всевозможных линейных отображений $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^\nu$, где $p \in \mathbb{N}$. Кроме того, нетрудно показать, что всякое линейное отображение $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^\nu$ имеет в силу сюрьективности θ вид $\theta \cdot \chi$. Отсюда следует, что отображение $\theta: G(I) \to \mathbb{R}^\nu$ непрерывно, и если $f: \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$ – такая функция, что композиция $f \cdot \theta$ непрерывна, то и f непрерывна (евклидова топология $\mathbb{R}^\nu$ является образом топологии $G(I)$ при отображении θ). Более того, по определению дифференцируемой структуры многообразия $G(I)$ отображение θ является гладким.

Обозначим $H = \ker\theta$, $St\,x$ – стабилизатор точки $x \in M$ в $G(I)$ относительно действия π. В силу того, что однопараметрические группы ψ_t^i и ψ_t^j коммутируют для $i,j \in I$, то $H \subset St\,x$ для любого $x \in M$, то есть $H \subset \bigcap_{x \in M} St\,x$. Тогда существует отображение $\pi_0: \mathbb{R}^\nu \times M \to M$, такое, что для любых $x \in M$ и $s \in G(I)$ выполняется условие $\pi_0(\theta(s),x) = \pi(s,x)$. Простая проверка показывает, что для π_0 справедливы следующие свойства:

I) $\pi_0(\tau,x) = \psi^1_{t_1} \circ \psi^2_{t_2} \circ \dots \circ \psi^\nu_{t_\nu}(x)$ для любых $\tau = (t_1,t_2,\dots,t_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$, $x \in M$;

2) $\pi_0(0,x) = x$ для любого $x \in M$;

3) $\pi_0(\tau + \tau', x) = \pi_0(\tau, \pi_0(\tau',x))$ для любых $\tau,\tau' \in \mathbb{R}^\nu$, $x \in M$;

4) отображение π_0 гладкое.

Будем обозначать $\tau x = \pi_0(\tau,x)$ для $\tau \in \mathbb{R}^\nu$, $x \in M$. Пусть $G(I)x$ – орбита точки x в M. Топология $G(I)x$ в [1] определяется как финальная относительно семейства отображений

$$\xi: (t_1,t_2,\dots,t_p) \to t_1 \cdot s_1\ t_2 \cdot s_2 \dots t_p \cdot s_p\, x,$$

где $s_i \in G(I)$ для $1 \leq i \leq p$, $p \in \mathbb{N}$. В предыдущих обозначениях для $t = (t_1,t_2,\dots,t_p)$ имеем

$$\xi(t) = \pi(\chi(t),x) = \pi_0(\theta \cdot \chi(t), x).$$

Это означает в силу транзитивности финальных топологий, что топология орбиты $G(I)x$ является образом евклидовой топологии пространства при отображении $\tau \to \pi_0(\tau,x)$ из $\mathbb{R}^\nu$ на $G(I)x$.

Для $y, y' \in G(I)x$ обозначим $G_x(y,y')$ – множество управлений $s \in G(I)$, таких, что $y' = s \cdot y$. Ясно, что если $y' = s \cdot y$, то $G_x(y,y') = s \cdot St\,y$. Для $y, y' \in G(I)x$ положим

$$d(y,y') = \inf_{s \in G_x(y,y')} \delta(s). \qquad (2)$$

Докажем, что функция d является метрикой на орбите $G(I)x$, определяющей топологию орбиты.

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть $x \in M$, $St\,x$ – стабилизатор точки x в $G(I)$ относительно действия π на M, $\widetilde{St}\,x$ – стабилизатор точки x в $\mathbb{R}^\nu$ относительно действия π_0. Тогда $St\,x = \theta^{-1}(\widetilde{St}\,x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $s \in St\,x$, то $\pi_0(\theta(s),x) = \pi(s,x) = x$, т.е.

$$\theta(s) \in \widetilde{St}\,x,\quad \theta(St\,x) \subset \widetilde{St}\,x \quad \text{и} \quad St\,x \subset \theta^{-1}(\theta(St\,x)) \subset \theta^{-1}(\widetilde{St}\,x).$$

Если $s \in \theta^{-1}(\widetilde{St}\,x)$, $\theta(s) \in \widetilde{St}\,x$, то $\pi(s,x) = \pi_0(\theta(s),x) = x$, откуда $s \in St\,x$. Таким образом, $\theta^{-1}(\widetilde{St}\,x) \subset St\,x$. В итоге $\theta^{-1}(\widetilde{St}\,x) = St\,x$.

Из доказанного следует, что $\theta(St\,x) = \widetilde{St}\,x$. Так как аддитивная группа $\mathbb{R}^\nu$ абелева, то для любой точки $y \in G(I)x$ имеем $\widetilde{St}\,y = \widetilde{St}\,x$. Тогда из предложения I вытекает, что и $St\,y = St\,x$. При этом, если $y' = s \cdot y$ для $y, y' \in G(I)x$ и $s \in G(I)$, то $G_x(y,y') = s \cdot St\,x$. Обозначим $\widetilde{G}_x(y,y')$ – множество управлений $\tau \in \mathbb{R}^\nu$, таких, что $y' = \tau \cdot y$. Ясно, что $\widetilde{G}_x(y,y') = \tau + \widetilde{St}\,x$ для τ, такого, что $y' = \tau \cdot y$.

Рассуждения, аналогичные рассуждениям предложения I, показывают, что

$$\theta^{-1}(\widetilde{G}_x(y,y')) = G_x(y,y'), \quad \widetilde{G}_x(y,y') = \theta(G_x(y,y')).$$

Для $\tau=(t_1,\dots,t_\nu)\in\mathbb{R}^\nu$ обозначим $\|\tau\| = \sum_{k=1}^{\nu}|t_k|$. Для $y,y'\in G(I)x$ положим

$$\widetilde{d}(y,y') = \inf_{\tau\in\widetilde{G}_x(y,y')} \|\tau\| \qquad (3)$$

П р е д л о ж е н и е 2. Функции d и $\widetilde{d}$ на орбите $G(I)x$ совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $s\in G(I)$ имеем $\|\theta(s)\|\le\delta(s)$, как следует из определения функции δ и формулы (1). Так как $\widetilde{G}_x(y,y')=\theta(G_x(y,y'))$ для любых $y,y'\in G(I)x$, то

$$\widetilde{d}(y,y') = \inf_{s\in G_x(y,y')}\|\theta(s)\| \le \inf_{s\in G_x(y,y')}\delta(s) = d(y,y').$$

С другой стороны, если $\widetilde{d}(y,y')<d(y,y')$, то существует $\tau\in\widetilde{G}_x(y,y')$, такое, что

$$\widetilde{d}(y,y') \le \|\tau\| < d(y,y'). \qquad (4)$$

Если $\tau=(t_1,t_2,\dots,t_\nu)$, то положим $s=(t_1,1)(t_2,2)\dots(t_\nu,\nu)$. Тогда $\tau=\theta(s)$, $s\in G_x(y,y')$ и $\|\tau\|=\delta(s)$. Это противоречит неравенству (4). Таким образом, $\widetilde{d}(y,y')=d(y,y')$, а значит и $\widetilde{d}=d$.

П р е д л о ж е н и е 3. Функция d является метрикой на орбите $G(I)x$ точки $x\in M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 2 следует, что достаточно рассмотреть функцию $\widetilde{d}$. Для $y,y'\in G(I)x$ свойства

$$\widetilde{d}(y,y')\geqslant 0 \qquad \text{и} \qquad \widetilde{d}(y,y') = \widetilde{d}(y',y)$$

очевидны. Если вдобавок $y''\in G(I)x$, то $y'=\tau\cdot y$ и $y''=\tau'\cdot y'$ для некоторых $\tau\in\widetilde{G}_x(y,y')$, $\tau'\in\widetilde{G}_x(y',y'')$. Тогда, очевидно, $\tau+\tau'\in\widetilde{G}_x(y,y'')$. При этом неравенство треугольника $\widetilde{d}(y,y'')\le\widetilde{d}(y,y')+\widetilde{d}(y',y'')$ следует из неравенства $\|\tau+\tau'\|\le\|\tau\|+\|\tau'\|$. Допустим, что $y=\tau_0 x$, $y'=\tau_0' x$ для $\tau_0,\tau_0'\in\mathbb{R}^\nu$, $y\ne y'$ и $\widetilde{d}(y,y')=0$. Так как топология орбиты $G(I)x$ хаусдорфова [1], то существует открытое множество $\mathcal{O}\subset G(I)x$, содержащее y, но не содержащее y'. Его прообраз $\mathcal{O}_0$ при отображении $\tau\to\tau x=\pi_0(\tau,x)$ открыт в евклидовой топологии $\mathbb{R}^\nu$, $\tau_0\in\mathcal{O}_0$, $\tau_0'\notin\mathcal{O}_0$. Тогда существует $\varepsilon>0$, такое, что шар B относительно нормы $\|\cdot\|$ с центром τ_0 и радиуса ε содержится в $\mathcal{O}_0$. При этом образ шара B при рассматриваемом отображении содержит точку y, но не содержит y', т.е. для любого $\tau_1\in B$ выполняется $\tau_1\cdot x\ne y'$. Так как $\widetilde{d}(y,y')=0$, то согласно (3) существует $\tau\in\widetilde{G}_x(y,y')$, такое, что $\|\tau\|\le\varepsilon$. Значит

$$\tau+\tau_0\in B, \quad y'=\tau\cdot y=\tau\,(\tau_0 x)=(\tau_0+\tau)x.$$

Это противоречие доказывает, что если $\widetilde{d}(y,y')=0$, то $y=y'$. Таким образом, $\widetilde{d}$ (а значит и d) – метрика на $G(I)x$.

П р е д л о ж е н и е 4. Топология, определяемая на $G(I)_x$ метрикой d, совпадает с финальной топологией.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Пусть $\mathcal{O}$ –подмножество орбиты $G(I)x$, открытое в финальной топологии и содержащее x. Тогда прообраз $\mathcal{O}_0$ его при отображении $\tau\to\tau x$ открыт в $\mathbb{R}^\nu$ и содержит 0. Значит найдется $\varepsilon>0$, такое, что шар B_0 с центром 0 и радиуса ε содержится в $\mathcal{O}_0$. Пусть теперь точка $y\in G(I)x$ такова, что $\widetilde{d}(x,y)\le\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда согласно (3) найдется $\tau\in\widetilde{G}_x(x,y)$, такое, что $\|\tau\|\le\varepsilon$ и $y=\tau x$, т.е. y принадлежит образу C шара B_0 при рассматриваемом отображении. Если B' – шар в $G(I)x$ с центром x радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ относительно метрики $\widetilde{d}$, то доказанное означает, что $B'\subset C\subset\mathcal{O}$. Таким образом, топология, определяемая метрикой $\widetilde{d}$ (а значит и d), сильнее финальной топологии орбиты $G(I)x$.

2) Пусть B – открытый шар в $G(I)x$ с центром x радиуса ε относительно метрики $\widetilde{d}$, C_0 – его прообраз в $\mathbb{R}^\nu$ при помощи отображения $\tau\to\tau x$. Возьмем $\tau_0\in C_0$. Тогда $\tau_0 x\in B$ и $\widetilde{d}(x,\tau_0 x)<\varepsilon$. Обозначим $\varepsilon_0=\widetilde{d}(x,\tau_0 x)$, $\varepsilon_1=\varepsilon-\varepsilon_0>0$. Пусть $\tau_1\in\mathbb{R}^\nu$ и удовлетворяет неравенству $\|\tau_1-\tau_0\|<\varepsilon_1$. Тогда

$$\tau_1 x = (\tau_1-\tau_0+\tau_0)x = (\tau_1-\tau_0)\,\tau_0 x.$$

Имеем

$$\widetilde{d}(x,\tau_1 x)\le\widetilde{d}(x,\tau_0 x)+\widetilde{d}(\tau_0 x,\tau_1 x)\le\varepsilon_0+\|\tau_1-\tau_0\|<\varepsilon_0+\varepsilon_1=\varepsilon,$$

т.е. $\tau_1 x\in B$, а $\tau_1\in C_0$. Это означает, что множество C_0 открыто в евклидовой топологии пространства $\mathbb{R}^\nu$, откуда следует, что B открыт в финальной топологии орбиты $G(I)x$. Значит финальная топология орбиты сильнее топологии, определяемой метрикой. Таким образом, упомянутые топологии совпадают.

Библиографический список

I. Л о б р и К. Динамические полиситемы и теория управления // Новое в зарубежной науке. Математика. М., 1979. Вып. I4. С.I34-I73.

2. Г о д б и й о н К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, I973. I88 с.

УДК 5I4.75

О СВЯЗИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КОМПЛЕКСОВ С КОМПЛЕКСАМИ КОНИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н.В.А м и ш е в а

(Кемеровский государственный университет)

В аффинном пространстве рассматривается линейчатый комплекс и находится ассоциированный с ним комплекс коник. Устанавливается связь между этими комплексами.

§ I. Канонизация репера линейчатого комплекса.

Деривационные формулы произвольного репера $\{\bar{r}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ аффинного пространства имеют вид:

$$d\bar{r} = \omega^i \bar{e}_i \quad , \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j ,$$

причем удовлетворяются уравнения структуры:

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i \quad , \quad d\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k .$$

Если начало A репера поместить на луч линейчатого комплекса, вектор $\bar{e}_3$ направить по лучу, а вектор $\bar{e}_2$-параллельно касательной плоскости цилиндра комплекса, то дифференциальные уравнения линейчатого комплекса примут вид:

$$\omega^1 = \beta\, \omega_3^1 + \gamma\, \omega_3^2, \tag{I}$$

$$\omega_2^1 = \lambda_{21}^1 \omega^2 + \lambda_{22}^1 \omega_3^1 + \lambda_{23}^1 \omega_3^2 . \tag{2}$$

На луче комплекса имеется инвариантная точка - центр луча, т.е. собственная точка прикосновения основного цилиндроида [I] . Основным цилиндроидом называют цилиндроид, направляющая плоскость которого параллельна касательной плоскости цилиндра комплекса. В выбранном репере основной цилиндроид определяется уравнениями:

$$\omega_3^1 = 0 \quad , \quad \omega_2^1 = 0 , \tag{3}$$

а радиус-вектор центра луча комплекса имеет вид:

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \frac{\lambda_{23}^1 + \lambda_{21}^1 \beta}{\lambda_{21}^1 (1-\beta)}\, \bar{e}_3 , \tag{4}$$

где O - начало неподвижной системы координат и $\overline{OA} = \bar{r}$.

Если начало репера совместить с центром луча комплекса, то будем иметь:

$$\lambda_{23}^1 = -\lambda_{21}^1 \beta, \tag{5}$$

$$\lambda_{21}^1 \neq 0 . \tag{6}$$

Форма ω^3 становится главной:

$$\omega^3 = \lambda_{01}^3 \omega^2 + \lambda_{02}^3 \omega_3^1 + \lambda_{03}^3 \omega_3^2 . \tag{7}$$

Аффинный центр луча (точка A) и касательная плоскость к цилиндру комплекса $L_2 = \{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ задают неголономную поверхность $\widetilde{V}$, аффинная нормаль которой в построенном репере параллельна вектору $\gamma \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 + (\lambda_{03}^3 + \beta \lambda_{01}^3) \bar{e}_3$. Направив вектор $\bar{e}_1$ параллельно аффинной нормали, получим соотношения:

$$\beta = 0 , \quad \lambda_{03}^3 = 0 , \quad \gamma \neq 0 . \tag{8}$$

При этом условия (5) примут вид:

$$\lambda_{23}^1 = 0 . \tag{9}$$

При фиксации вектора $\bar{e}_1$ формы ω_1^2 и ω_1^3 стали главными. Их разложение по базисным запишем в виде:

$$\omega_1^2 = \lambda_{11}^2 \omega^2 + \lambda_{12}^2 \omega_3^1 + \lambda_{13}^2 \omega_3^2 \quad , \quad \omega_1^3 = \lambda_{11}^3 \omega^2 + \lambda_{12}^3 \omega_3^1 + \lambda_{13}^3 \omega_3^2 . \tag{I0}$$

С учетом соотношений (8) уравнение (I) принимает вид:

$$\omega^1 = \gamma\, \omega_3^2 . \tag{II}$$

Замыкание уравнения (II) приводит к следующему квадратичному уравнению:

$$\{d\gamma + \gamma \lambda_{13}^2 \omega_3^1 + \gamma(\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_1^1)\} \wedge \omega_3^2 + (\lambda_{22}^1 + \lambda_{01}^3 + \gamma \lambda_{11}^2)\, \omega_3^1 \wedge \omega^2 = 0,$$